QUELQUES RÉSULTATS SUR Π ET L'EXPONENTIELLE

DIMITRI LE GALLIC, OUSSEYNOU MBAYE

Contents

1. Introduction

On étudie ici initialement l'irrationalité de π et de e, ainsi que de certaines valeurs dépendant de ces constantes. Par la suite on s'interroge sur leur caractère transcendant en développant quelques résultats classiques du XIX^e siècle.

On rappelle avant toute chose la définition d'un rationnel.

Définition 1.1.
On dit qu'un nombre r est rationnel si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$.

On peut avant tout s'intéresser à la structure de l'ensemble des irrationnels de plus près. On montre en particulier que c'est un ensemble non vide, et qu'il n'est stable ni par sommation ni par produit.

Proposition 1.
La racine carrée de 2 est irrationnelle.

Démonstration.
Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Par définition il existe donc un couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p \wedge q = 1$.
Donc par passage au carré $p^2 = 2q^2$. On en déduit que p^2 est pair et donc p aussi. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. Alors $2k^2 = q^2$ et par le même raisonnement, q est pair. On a donc $p \wedge q = 2$, c'est absurde. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel. □

Remarque. L'ensemble $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est donc non vide.

Proposition 2.
L'ensemble des irrationnels n'est en général stable ni par somme, ni par produit, ni par exponentiation.

Démonstration.
Le nombre $1-\sqrt{2}$ est irrationnel puisque si $1-\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, $(p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*)$ alors $1-\frac{p}{q}=\sqrt{2}$, absurde. On en déduit l'instabilité de l'ensemble des irrationnels par sommation.
Le produit n'est pas stable puisque $\sqrt{2}*\sqrt{2}=2\in\mathbb{N}$.
Enfin pour le passage a l'exponentiation, considérons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Il y a 2 possibilités

- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$. Dans ce cas la preuve est finie.
- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$. Dans ce cas on considère $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2\in\mathbb{Q}$.

□

Remarque. On verra par la suite l'irrationalité, et même la transcendance, de e et π. Cependant, les quelques résultats précédents mettent l'emphase sur les natures inconnues de $e*\pi$, e^π, π^e ou encore de $\ln(\pi)$. Leur irrationalité et leur transcendance n'a pas encore été démontré, notamment par soucis d'indépendance algébrique entre e et π. C'est en fait la conjecture de Schanuel.

Remarque. Il a été démontré que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel. C'est le théorème de Gelfond-Schneider, solution du septième problème de Hilbert qui nous en apporte la démonstration. Il s'énonce comme suit : Si α est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 et si β est un nombre algébrique irrationnel alors α^β est transcendant. On verra par la suite que $\sqrt{2}$ est algébrique et donc que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est transcendant. La transcendance impliquant l'irrationalité, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

2. Irrationalité de e

Dans cette section nous reprenons la démonstration de Liouville publiée en 1848 qui montre que e n'est pas quadratique, c'est à dire qu'il ne peut être solution d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

Proposition 3. [1]
La constante e est irrationnelle.

Démonstration. On suppose par l'absurde que e est solution d'une équation du second degré de la forme :
$$aX^2-cX+b=0$$
où a est un entier positif, b et c des entiers positifs ou négatifs. Cela revient alors à supposer que le nombre e vérifie l'équation :
$$ae+\frac{b}{e}=c$$
En remplaçant dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ par leurs développements déduits de e^x on obtient :
$$a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}+b\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=c$$
Soit n un entier strictement positif. En multipliant chacun des membres de l'équation par $n!$ on obtient :
$$a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n!}{k!}+b\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{n!}{k!}=n!c$$

Cela revient à dire :

$$a\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}+b\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{n!}{k!}=n!c-a\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}-b\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$$

Posons alors :

$$\varepsilon=a\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}+b\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{n!}{k!}$$

$$\mu=n!c-a\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}-b\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$$

On a donc $\varepsilon=\mu$

Étude de μ : Il est clair que $\mu\in\mathbb{Z}$ car pour $k\le n$, $\frac{n!}{k!}\in\mathbb{N}$.

Étude de ε : Selon le signe de b on peut faire en sorte que ε soit toujours strictement positif. En effet :

Si $b>0$, en prenant n impair (c'est à dire $n+1$ pair), on obtient $(-1)^{n+1}=1$ et donc :

$$\begin{aligned}\varepsilon&=a\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}+b\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{n!}{k!}\\&=a\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots\right)+b\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots\right)\\&=\frac{a}{(n+1)}\left(1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\cdots\right)+\frac{b}{(n+1)}\left(1-\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\cdots\right)>0\end{aligned}$$

Et si $b<0$, en prenant n pair (c'est à dire $n+1$ impair), on obtient $(-1)^{n+1}=-1$ et donc:

$$\begin{aligned}\varepsilon&=a\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots\right)-b\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots\right)\\&=\frac{a}{n+1}\left(1+\frac{1}{(n+2)}\cdots\right)-\frac{b}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\cdots\right)>0\end{aligned}$$

De la même manière pour n assez grand on peut montrer que ε est inférieur à 1. En effet , d'après l'inégalité triangulaire on a:

$$|\varepsilon|\le(a+|b|)\sum_{k=n+1}\frac{n!}{k!}$$

comme

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots\le\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^i}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n+1}\left[\frac{1-\frac{1}{(n+1)}^m}{1-\frac{1}{n+1}}\right]=\frac{1}{n}$$

Alors :

$$\varepsilon\le|\varepsilon|\le\frac{a+|b|}{n}$$

Et donc pour n assez grand (disons $n>a+|b|$), on obtient facilement $\varepsilon<1$

Contradiction : On a montré qu'en fonction du signe de b on peut toujours choisir n de tel sorte que :

$$\boxed{0 < \varepsilon < 1}$$

Mais

$$\boxed{\varepsilon = \mu \in \mathbb{Z} \implies \varepsilon \in \mathbb{Z}}$$

On obtient une contradiction car **aucun entier n' est strictement compris entre 0 et 1.** Par conséquent e ne peut être solution d'une équation du second degré à coefficients entiers. □

Corollaire 1. Donc e n'est pas rationnel puisque tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$ annule le polynôme du premier degré $P = X - r$, $P \in \mathbb{Q}[X]$.

3. Irrationalité de π

Une première démonstration de l'irrationalité de π est publié par Johann Heinrich Lambert[2]. On s'intéresse ici à la preuve d'Hermite, sous une version simplifiée par Ivan Niven, par analyse réelle.

Proposition 4. [3]
Le nombre π est irrationnel.

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons que π soit un rationnel.
Puisqu'il est positif, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux polynômes suivants :

$$f_n(x) = \frac{x^n(p - qx)^n}{n!} \tag{1}$$

$$F_n(x) = f_n(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_n^{(2k)}(x) \tag{2}$$

On remarque tout d'abord que $f_n(x) = f_n(\frac{p}{q} - x)$:

$$\begin{aligned} f_n(\frac{p}{q} - x) &= \frac{(\frac{p}{q} - x)^n(p - q(\frac{p}{q} - x))^n}{n!} \\ &= \frac{(\frac{p}{q} - x)^n(qx)^n}{n!} \\ &= \frac{(p - qx)^n x^n}{n!} \end{aligned}$$

Donc en particulier,

$$f_n(0) = f_n(\pi) \tag{3}$$

De plus, $n!f_n(x) = x^n(p - qx)^n$ est un polynôme de degré $2n$ à coefficients entiers, où chacun de ses termes est de degré au moins égal à n.

Donc pour tout $i \in [\![0..n-1]\!]$, $f_n^{(i)}(0) = 0$ puisque le degré des termes de f_n est au moins de 1. De même, pour tout $i > 2n$, $f_n^{(i)}(0) = 0$ puisque le polynôme est seulement de degré $2n$.

Pour $i \in [\![n..2n]\!]$, il existe un unique terme de degré nul dans $f_n^{(i)}$ qui ne s'annule donc pas en 0. Le coefficient associé à ce terme est, d'après le binôme de Newton et pour i fixé dans $[\![n..2n]\!]$, de la forme $(n+i)! * \frac{m}{n!} \in \mathbb{N}$ avec $m \in \mathbb{N}$.
Donc $\forall i \in [\![n..2n]\!]$, $f_n^{(i)} \in \mathbb{N}$. D'après (1) et (3), on en déduit donc par dérivé de fonction composée que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}, f_n^{(i)}(\pi) \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

On s'intéresse désormais au deuxième polynôme, $F_n(x)$.
On propose les résultats intermédiaires suivants :

$$(F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x)' = F_n''(x)\sin x + F_n(x)\sin x = f_n(x)\sin x$$

$$donc : \int_0^\pi f_n(x)\sin x dx = [F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x]_0^\pi = F_n(\pi) + F_n(0)$$

Or, d'après la définition du polynôme F_n et par (3) et (4) on a que $F_n(\pi) + F_n(0)$ est un entier.
Cependant, pour tout $0 < x < \pi$ on a les inégalités suivantes :

$$0 < f_n(x)\sin x \leqslant f_n(x) < \frac{\pi^n p^n}{n!} \tag{5}$$

Ainsi,

$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin x dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n p^n}{n!} dx = \frac{\pi^{n+1} p^n}{n!} \tag{6}$$

Or pour n assez grand, $0 < \frac{\pi^{n+1} p^n}{n!} < 1$, donc $F_n(\pi) + F_n(0)$ ne peut être un entier, c'est absurde. Par conséquent, l'hypothèse de rationalité de π est fausse. □

4. Quelques résultats supplémentaires

Désormais que nous avons prouvé l'irrationalité de e ainsi que de π, nous pouvons nous interroger quant à la généralisation de certains de nos résultats, en s'inspirant de la preuve de Niven.

Proposition 5. [4]
Soit r un rationnel non nul, alors e^r, $\ln(r)$, π^2 sont irrationnels.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$ on définit l'intégrale suivante :

$$I_k(z) = z^{k+1} \int_0^1 t^k e^{zt} dt$$

Par intégration par parties on obtient la formule récursive suivante:

$$\begin{aligned} I_k(z) &= z^{k+1} \int_0^1 t^k e^{zt} dt \\ &= z^{k+1}([\tfrac{t^k e^{zt}}{z}]_0^1 - \tfrac{k}{z} \int_0^1 t^{k-1} e^{zt} dt) \\ &= z^k e^{zt} - kI_{k-1}(z) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $I_0(z) = e^z - 1$. On peut donc définir une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers $r_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} r_0(z) = 1 \\ r_k(z) = z^k - k r_{k-1}(z) \end{cases}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait :

$$I_k(z) = r_k(z)e^z - (-1)^k k!$$

On raisonne désormais de façon analogue à la preuve de Niven de l'irrationalité de π en posant:

$$p_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \tag{7}$$

On a montré dans la preuve de Niven que toute dérivé de $f^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$ est une fonction polynomiale à coefficients de degré $2n - i$. Ces résultats sont valides pour p_n par simple changement de facteurs. En particulier, $p^{(n)}$ est de degré n et en notant ses coefficients entiers $p_0^n, p_1^n, \ldots, p_n^n$ on définit l'intégrale suivante

$$\begin{aligned}
J_n(z) &= z^{n+1} \int_0^1 p_n^{(n)}(t) e^{zt} dt \\
&= z^{n+1} \int_0^1 (\sum_{k=0}^n p_k^n t^k) e^{zt} dt \\
&= z^{n+1} \sum_{k=0}^n p_k^n \int_0^1 t^k e^{zt} dt \\
&= z^{n+1} \sum_{k=0}^n p_k^n z^{-(k+1)} I_k(z) \\
&= \sum_{k=0}^n p_k^n z^{n-k} I_k(z) \\
&= \sum_{k=0}^n p_k^n z^{n-k} (r_k(z)e^z - (-1)^k k!) \\
&= e^z \sum_{k=0}^n p_k^n z^{n-k} r_k(z) - \sum_{k=0}^n p_k^n z^{n-k} (-1)^k k!
\end{aligned}$$

En posant $R_n(z) = \sum_{k=0}^n p_k^n z^{n-k} r_k(z)$ et $Q_n(z) = -\sum_{k=0}^n p_k^n z^{n-k}(-1)^k k!$ comme deux fonctions polynomiales à coefficients entiers, de degrés respectifs inférieur ou égal à n, on obtient :

$$J_n(z) = R_n(z)e^z + Q_n(z) \tag{8}$$

Par ailleurs en intégrant n fois par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
J_n(z) &= z^{n+1}\int_0^1 p_n^{(n)}(t)e^{zt}dt \\
&= z^{n+1}([e^{zt}p_n^{n-1}(t)]_0^1 - z\int_0^1 p_n^{(n-1)}(t)e^{zt}dt) \\
&= -z^{n+2}\int_0^1 p_n^{(n-1)}(t)e^{zt}dt \\
&\dots \\
&= (-1)^n z^{2n+1}\int_0^1 p_n(t)e^{zt}dt \\
&= (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{zt}dt \qquad (9)
\end{aligned}$$

Or $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ donc :

$$\begin{aligned}
|J_n(z)| \leq \left|\frac{z^{2n+1}}{4^n n!}\right|\int_0^1 e^{zt}dt &= \left|\frac{z^{2n+1}}{4n!}\right|\left|(\frac{e^z-1}{z})\right| \\
&\leq \frac{|z/2|}{n!}^{2n} e^{\mathfrak{Re}(z)}
\end{aligned}$$

Donc J_n converge simplement vers 0 pour tout $z \in \mathbb{C}$ quand n tend vers l'infini. Par l'absurde supposons que z et e^z sont des rationnels de Gauss, i.e. qu'il existe $(a,a'),(c,c') \in \mathbb{Z}^2 \quad b,d \in \mathbb{N}^*$ tel que $z = \frac{a+ia'}{b}; \quad e^z = \frac{c+ic'}{d}$. On a donc

$$db^n J_n(z) = db^n(R_n(z)e^z + Q_n(z)) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$$

un entier de Gauss.
Puisqu'on a convergence vers 0 de $J_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$ et que c'est un entier de Gauss, si le support de $db^n J_n(z)$ n'est pas fini, supposer que z et e^z sont des rationnels de Gauss est absurde. Or d'après (9), l'intégrale étant strictement positive, $J_n(z)$ ne s'annule qu'en 0. Donc pour tout rationnel de Gauss z non nul, e^z est irrationnel. Conversement, si e^z est rationnel différent de 1, alors z est irrationnel. on en déduit que tout logarithme de rationnel est irrationnel et en posant $z = i\pi$, puisque

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Im}\left(\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{zt}dt\right) = \int_0^1 t^n(1-t)^n sin(\pi t)dt > 0 \\
&\Rightarrow J_n(i\pi) \neq 0
\end{aligned}$$

on obtient par l'identité d'Euler l'irrationalité de π. Par symétrie, on a

$$\mathfrak{Re}\left(\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{zt}dt\right) = \int_0^1 t^n(1-t)^n cos(\pi t)dt = 0$$

Donc $(-1)^n\frac{(i\pi)^{2n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{i\pi t}dt \in \mathbb{R}$ et donc

$$J_n(i\pi) = (R_n e^{i\pi} + Q_n)(i\pi) = (Q_n - R_n)(i\pi) = \mathfrak{Re}(Q_n - R_n)(i\pi)$$

en notant $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ les coefficients du polynôme $(Q_n - R_n)(i\pi)$ on conclut

$$J_n(i\pi) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k c_{2k}\pi^{2k}$$

En supposant que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ avec a et b des entiers non nuls, alors $b^n J_n(i\pi)$ est un entier non nul, ce qui est absurde. On en conclut que π^2 est irrationnel. $\square$

5. Vers la transcendance

On définit avant tout ce qu'est la transcendance :

Définition 5.1 (Nombres algébriques et transcendants)**.** [5]
Soit $z \in \mathbb{C}$.

- S'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]\backslash\{0\}$, tel que $P(z) = 0$ alors z est dit algébrique. Dans ce cas, on appelle degré de z le degré de l'unique polynôme minimale unitaire $Q \in \mathbb{Q}[X]\backslash\{0\}$ tel que $Q(z) = 0$.
- Sinon, s'il n'existe aucun tel polynôme, z est dit transcendant.

Remarque. Il y a équivalence entre les racines des polynômes de $\mathbb{Q}[X]\backslash\{0\}$ et de $\mathbb{Z}[X]\backslash\{0\}$ par simple produit. Il est souvent privilégié dans la littérature d'utiliser cette dernière forme.

Tout rationnel est un nombre algébrique par définition. On montre la distinction entre l'ensemble des rationnels et l'ensemble des algébriques par le caractère non vide du sous-ensembles des algébriques de degré au moins 2.

Démonstration.
En reprenant l'exemple de $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, on trouve que le polynôme

$$P \in \mathbb{Q}[X],\, P(X) = X^2 - 2$$

annule $\sqrt{2}$. On en déduit que $\sqrt{2}$ est algébrique de degré 2 et par conséquent que l'ensemble des nombres algébrique est non vide.

$\square$

L'existence des nombres transcendants est elle moins triviale. Par un argument de densité, puisque que l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients entier est dénombrable, l'ensemble des nombre algébriques l'est aussi. Or $\mathbb{R}$ n'étant pas dénombrable, il existe des nombres qui ne sont pas algébriques dans $\mathbb{R}$. Ce sont les transcendants. La découverte d'un élément concret de cet ensemble n'est faite qu'en 1844 par Liouville, qui le construit. On explicite cette construction :

Dans un premier temps, on s'intéresse a l'approximation des réels par les rationnels. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on choisit de s'intéresser en particulier aux rationnels de dénominateur faible plutôt qu'à l'ensemble des rationnels.

Proposition 6 (Théorème de Dirichlet)**.** [6]
Pour tout $\xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Démonstration.
Soit un entier n ≥ 1. Pour tout $k \in [\![0..n]\!] \quad k\xi - \lfloor k\xi \rfloor \in [0,1[$. On peut ainsi diviser l'intervalle $[0,1[$ en n intervalles de la forme $[\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}[, r \in [\![0..n-1]\!]$. Or d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, puisque l'on dispose de $n+1$ parties fractionnaires $k\xi - \lfloor k\xi \rfloor$, il existe un intervalle contenant au moins deux parties fractionnaires. i.e.

$$\exists r, j, k \in \mathbb{N} \quad r < n, \quad j < k \leq n, \quad \frac{r}{n} \leq j\xi - \lfloor j\xi \rfloor, k\xi - \lfloor k\xi \rfloor < \frac{r+1}{n}$$

En posant $q = k - j$ qui vérifie $1 \leq q \leq n$ et $p = \lfloor k\xi \rfloor - \lfloor j\xi \rfloor$ on obtient bien

$$\left|q\xi - p\right| = \left|(k\xi - \lfloor k\xi \rfloor) - (j\xi - \lfloor j\xi \rfloor)\right| < \frac{1}{n}.$$

et donc

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq} < \frac{1}{q^2}$$

Puisque n est quelconque, on en déduit l'infinité de solution $\frac{p}{q}$. □

Proposition 7 (Théorème de Liouville)**.** [7, 8]
Soit ξ un nombre algébrique de degré $d > 1$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^d}$$

Démonstration.
Soit ξ un nombre algébrique tel que $deg(\xi) \geq 2$, P son polynôme unitaire minimal associé et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

- Si $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > 1$, alors $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^d}$, on peut donc poser $c = 1$.
- Sinon, $\frac{p}{q} \in [\xi - 1, \xi + 1]$. Par théorème des accroissements finis, il existe $M > 0$ tel que $\left|P(\xi) - P(\frac{p}{q})\right| \leq M\left|\xi - \frac{p}{q}\right|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Puisque } P(\xi) = 0, \quad & \left|P\left(\tfrac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\xi - \tfrac{p}{q}\right|, \\ \text{donc} \quad & \left|q^d P\left(\tfrac{p}{q}\right)\right| \leq q^d M\left|\xi - \tfrac{p}{q}\right|, \\ \text{or } q^d P\left(\tfrac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad & 1 \leq \left|q^d P\left(\tfrac{p}{q}\right)\right|, \\ \text{donc} \quad & \left|\xi - \tfrac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d M} > \frac{1}{q^d(M+1)}. \end{aligned}$$

  On peut donc poser $c = min(1, \frac{1}{M+1})$

□

Corollaire 2. On déduit par la contraposée de ce théorème une condition suffisante pour qu'un nombre soit transcendant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\, \forall d > 1,\, \forall c > 0,\, \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^d}$$

De tels nombres sont appelés nombres de Liouville. Liouville en propose une construction : $\sum_{k=0}^{+\infty} b^{-k!}$ où b est un entier supérieur à 1. En particulier $\sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-k!}$ est appelé constante de Liouville et est le premier nombre transcendant concret découvert.

6. Transcendance de e et π

La preuve de l'irrationalité de e formulée par Liouville montre que l'exponentielle n'est racine d'aucun polynôme du second degré à coefficients rationnels. Il est donc naturel de s'interroger quant à une transcendance potentielle de e.

Proposition 8. [9]
La constante e est transcendante.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée au polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $deg(P) = m$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la somme de ses dérivés. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)du$$

On a remarque que :

$$(e^{-u}F(u))' = e^{-u}(F'(u) - F(u)) = e^{-u}(\sum_{k=1}^{m+1} f^{(k)}(u) - \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(u)) = -e^{-u}f(u)$$

donc :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t e^{t-u} f(u)du \\ &= -e^t[e^{-u}F(u)]_0^t \\ &= e^tF(0) - F(t) \end{aligned}$$

Supposons désormais que e est algébrique. On pose $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ tel que

$$a_0 + a_1e + \ldots + a_ne^n = 0$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ on pose

$$P = X^{p-1}(X-1)^p(X-2)^p \ldots (X-n)^p$$

et

$$J = a_0I(0) + a_1I(1) + \ldots + a_nI(n)$$

On montre que $J \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} J &= a_0I(0) + a_1I(1) + \ldots + a_nI(n) \\ &= a_0(F(0) - F(0)) + a_1(e^1F(0) - F(1)) + \ldots + a_n(e^nF(0) - F(n)) \\ &= (\sum_{k=0}^{n} a_ke^k)F(0) - \sum_{k=0}^{n} a_kF(k) \\ &= -\sum_{k=0}^{n} a_kF(k) \qquad (10) \end{aligned}$$

P étant a coefficients entier, J est un entier.

On montre que $(p-1)!$ divise J :
Pour 0, on peut noter $f(x) = x^{p-1}Q(x)$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, 0 n'étant pas une racine de Q. Ainsi, pour $i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}(0)$ est non nul si et seulement si on a dérivé (p-1) fois le premier terme, i.e. si $i \geq p-1$ et $f^{(i)}(0) = (p-1)!Q^{(i-p+1)}(0)$. Donc $(p-1)!$ divise $F(0)$. Pour $1 \leq k \leq n$, on note de façon analogue $f(x) = (x-k)^pR(x)$, $R \in \mathbb{R}[X]$, k n'étant pas racine de R. Et par le même raisonnement, $f(k)$ est non nul si et

seulement si $i \geq p$ et $f^{(i)}(k) = p!R^{(i-p)}(k)$. Donc $(p-1)!$ divise $F(k)$. D'après (10), $(p-1)!$ divise donc J.

On montre que pour p premier assez grand, $J \neq 0$:
Si $J = 0$ alors tout entier le divise. En particulier, p divise J. On a vu que p divise $F(k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$, et on remarque que pour tout $i > p-1$, $f^{(i)}(0)$ est aussi divisé par p. Cependant pour $i = p-1$, on a $f^{(i)}(0) = (p-1)!(-1)^p(-2)^p \ldots (-n)^p$ or puisque p est premier, si $p > n$, il ne divise pas$(-1)^p(-2)^p \ldots (-n)^p$ et donc pas $f^{(i)}(0)$. Donc a fortiori p ne divise pas non plus J et donc J est non nul.

On majore J :
Pour cela on majore $I(t)$, $t \in [1, n]$. $\forall t \in [1, n]$, $I(t) \leq I(n)$, donc on ne s'intéresse qu'a $I(n)$. Dans l'intégrale, e^{t-u} est majoré par e^n, $f(u) = u^{(p-1)}[(u-1)(u-2)\ldots(u-n)]^p$ et majore par $n^{p-1}n^{np}$ donc $|I(n)| \leq n^{p-1}n^{np}e^n$. Donc $|J| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|n^{p-1}n^{np}e^n$ et en posant $a = max(\sum_{k=0}^{n} |a_k|e^n, n)$, $C = an^n$ on a $|J| \leq C^p$.

On conclut : pour p assez grand, on a l'encadrement suivant $0 < |J| < C^p$ et $(p-1)!$ divise J. Or à partir d'un certain p on a $(p-1)! > C^p$ par croissance comparée, ce qui est absurde.
Donc e est transcendant. □

Proposition 9 (Théorème d'Hermite-Lindemann)**.**
Si α est un nombre algébrique non nul alors e^α est transcendant. (*admis)*

Proposition 10.
Le nombre π est transcendant.

Démonstration. Par l'absurde supposons π algébrique. $i\pi$ l'est aussi puisque si $P = X^2 + 1$ et Q sont les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ annulateurs respectivement de i et de π alors $R = PQ$ annule $i\pi$. Or, $e^{i\pi} = -1$ est algébrique donc π est transcendant. □

Remarque. C'est là la démonstration de l'impossibilité de la quadrature du cercle, puisqu'un nombre transcendant n'est pas un nombre constructible.

References

[1] Joseph LIOUVILLE. Sur l'irrationnalité du nombre $e = 2,718\ldots$. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1e série, 5:192–192, 1840.

[2] Johann Heinrich LAMBERT. Irrationalité de π, 1761.

[3] Ivan NIVEN. A simple proof that π is irrational. *Pi: A Source Book*, pages 276–276, 1947.

[4] Jürgen MÜLLER and Tom MÜLLER. 3 in 1: A simple way to prove that e^r,ln(r) and π^2 are irrationnal. *Elemente der Mathematik*.

[5] Louis DUCONGÉ. Théorèmes d'hermite-lindemann et de lindemann-weierstrass.

[6] Wikiversité. Approximation diophantienne et fractions continues : Application du principe des tiroirs.

[7] Joseph LIOUVILLE. Compte rendu des seances de l'académie des sciences. 1844.

[8] Maurice MIGNOTTE. Approximations diophantiennes et nombres transcendants. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, 12:1–18, 1970-1971. talk:22.

[9] FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS. Transcendance de e.