DÉMONSTRATIONS - THÉORIE DE LA MESURE

1. Démonstrations

Proposition 1. L'image d'une tribu est-elle une tribu ? Qu'en est il de l'image réciproque ?

Démonstration. L'image d'une tribu n'est généralement pas une tribu. On peut pour s'en convaincre considérer une fonction constante dont l'image est un singleton sur l'espace d'arrivée.
L'image réciproque d'une tribu est une tribu.
Soit X un espace quelconque, $(Y, \mathscr{C})$ un espace mesurable et $f : X \to Y$ une application quelconque. Montrons que $f^{-1}(\mathscr{C})$ est une tribu sur X.

— $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ donc $\emptyset \in f^{-1}(\mathscr{C})$
— Soit $A \in f^{-1}(\mathscr{C})$, $\exists C \in \mathscr{C}$ tel que $A = f^{-1}(C)$. $\mathscr{C}$ est une tribu donc $C^c \in \mathscr{C}$ et donc $A^c = (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in f^{-1}(\mathscr{C})$
— Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sur $f^{-1}(\mathscr{C})$. On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C_n \in \mathscr{C}, \quad A_n = f^{-1}(C_n)$.
Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(C_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \in f^{-1}(\mathscr{C})$ puisque $\mathscr{C}$ est une tribu.

Donc $f^{-1}(\mathscr{C})$ est une tribu sur X appelée tribu réciproque. □

Proposition 2. Montrer que si $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{C})$ avec $\mathscr{C} = \sigma(\mathscr{E})$ vérifie $\forall C \in \mathscr{E} \quad f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$ alors f est $(\mathscr{A}, \mathscr{C})$-mesurable.

Démonstration. On s'appuie sur les 3 lemmes suivants :
Lemme 1 : L'image réciproque d'une tribu est une tribu. (cf. Proposition 1)
Lemme 2 : $\mathscr{C} = \{C \subseteq Y, f^{-1}(C) \in \mathscr{A}\}$ est une tribu sur Y :
— $\emptyset \in Y$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{A}$ donc $\emptyset \in \mathscr{C}$
— Soit $C \in \mathscr{C}$, $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c = f^{-1}(C^c) \in \mathscr{A}$ donc $C^c \in \mathscr{C}$
— Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sur $\mathscr{C}$. $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(C_n) \in \mathscr{A}$

donc $\mathscr{C}$ est une tribu sur Y appelée tribu induite de $\mathscr{A}$ par f.
Lemme 3 : $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$, $\forall \mathscr{E} \in \mathscr{P}(Y)$:
$\subseteq$ Soit $\mathscr{C} = \{C \subseteq Y, f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))\}$
$\mathscr{C}$ est une tribu sur X comme tribu réciproque (*Lemme 1*) d'une tribu induite (*Lemme 2*).
Montrons que $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) \subseteq f^{-1}(C) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$
$\mathscr{C}$ est une tribu contenant $\mathscr{E}$ donc $\sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{C}$ et donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) \subseteq f^{-1}(\mathscr{C})$
Par définition de $\mathscr{C}$, $\forall C \in \mathscr{C}$, $f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$ donc $f^{-1}(\mathscr{C}) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$
donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$
$\supseteq$ $\mathscr{E} \subseteq \sigma(\mathscr{E})$ donc $f^{-1}(\mathscr{E}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))$ or $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))$ est une tribu sur X (*Lemme 1*)
donc $\sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}))$
donc $f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$

Soit $C \in \mathscr{C}$, montrons que $f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$.
$C \in \sigma(\mathscr{E})$ donc $f^{-1}(C) \in f^{-1}(\sigma(\mathscr{E}) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E}))$ (*Lemme 3*).
Par hypothèse $f^{-1}(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ est une tribu donc $\sigma(f^{-1}(\mathscr{E})) \subseteq \mathscr{A}$.
i.e $f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$ donc f est $(\mathscr{A}, \mathscr{C})$-mesurable. □

Proposition 3. Soit $f = (f_1, f_2)$ une application de $(X, \mathscr{A})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$.
Montrer que f est mesurable ssi f_1 et f_2 le sont.

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que f soit mesurable.
Soit $\pi_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $\pi_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2$ les projections canoniques de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Elles sont canoniques donc boréliennes, et par composition, $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$ sont boréliennes.
$\Leftarrow$ Supposons que f_1 et f_2 soient mesurables.
$\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathscr{O}(\mathbb{R}^2))$ et $\mathscr{O}(\mathbb{R}^2) = \{\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i, U_i, V_i \in \mathscr{O}(\mathbb{R})\}$
Donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{U \times V, U, V \in \mathscr{O}(\mathbb{R})\})$.
Soient $U, V \in \mathscr{O}(\mathbb{R})$
$f^{-1}(U \times V) = \{x \in X, f(x) \in U \times V\} = \{x \in X, f_1(x) \in U, f_2(x) \in V\} = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ avec $f^{-1}(U) \in \mathscr{A}$ et $f^{-1}(V) \in \mathscr{A}$.
Donc f est mesurable. □

Proposition 4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de $(X,\mathscr{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Montrer que $\sup\limits_n f_n$ et $lim \sup\limits_n f_n$ sont mesurables. Si (f_n) converge simplement vers f alors f est mesurable.

Démonstration. $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{O}(\mathbb{R})) = \sigma(\{]a,+\infty[, a\in\mathbb{R}\})$.
Soit $a\in\mathbb{R}$, on a

$$\{\sup_n f_n > a\} = \{x\in X, \sup_n f_n(x) > a\} = \{x\in X, \exists n\in\mathbb{N}, f_n(x) > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)>a\}\in\mathscr{A}$$

donc $\sup\limits_n f_n$ est mesurable. De façon analogue, $\inf\limits_n f_n$ l'est aussi.
$lim \sup\limits_n f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup\limits_{k\geq n} f_n\right)$ mesurable.
Si (f_n) converge simplement vers f alors $lim \sup\limits_n f_n = lim \inf\limits_n f_n = f$ donc f est mesurable. □

Proposition 5. Lemme fondamental d'approximation des fonctions mesurables positives.
Soit $f:(X,\mathscr{A})\to\mathbb{K}$ borélienne.
— il existe une suite (φ_n) de fonctions étagées telle que (φ_n) converge simplement vers f.
— si f est positive ou nulle, on peut choisir (φ_n) croissante et positive.
— si f est bornée, il existe (φ_n) convergeant uniformément vers f.

Démonstration. Soit (α_n) une suite de réels décroissante de limite nulle, avec $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{n}{\alpha_n}\in\mathbb{N}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $\forall x\in X$, $\varphi_n(x) = \lfloor\frac{f(x)}{\alpha_n}\rfloor\alpha_n$ si $f(x)<n$ et $\varphi_n(x)=n$ sinon.
On pose $E_{n,k} = \{x\in X, \varphi_n(x) = k\alpha_n\} = f^{-1}([k\alpha_n,(k+1)\alpha_n[)\in\mathscr{A}$
et $E_{n,+\infty} = \{x\in X, \varphi_n(x) = n\} = f^{-1}([n,+\infty[)\in\mathscr{A}$
On a donc

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{\alpha_n}-1} k\alpha_n \mathbb{1}_{E_{n,k}}(x) + n\mathbb{1}_{E_{n,+\infty}}(x)$$

et donc $\forall n\in\mathbb{N}$, φ_n est une fonction étagée.
Montrons désormais la convergence simple :
Soit $N\in\mathbb{N}$, $x\in\{f\leq N\}$. On a $\forall n\in\mathbb{N}$:
$0\leq f(x)-\varphi_n(x)\leq\alpha_n$ et $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(\varphi_n(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$
Donc $\forall x\in\{f<+\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f\leq N\}$, $(\varphi_n(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
Soit $x\in\{f=+\infty\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty = f(x)$
Donc pour tout $x\in X$, $(\varphi_n(x))$ converge simplement vers $f(x)$.
Pour obtenir la croissance de (φ_n) il faut choisir un α_n tel que $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\in\mathbb{N}$. $\alpha_n = 2^{-n}$ convient.
Si f est bornée alors $\exists M\in\mathbb{R}, \forall x\in X, 0\leq f(x)\leq M$, donc $\forall n\geq M$, $\{f\geq n\}=\emptyset$
donc $\forall x\in X, 0\leq f(x)-\varphi_n(x)\leq\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (φ_n) converge uniformément vers f. □

Proposition 6. Démontrer les propriétés de continuité séquentielle croissante et décroissante ainsi que la σ-sous-additivité d'une mesure positive.

Démonstration. (*Continuité séquentielle croissante*)
Soit (A_n) une suite croissante de $\mathscr{A}$, montrons que $\mu\left(\bigcup\limits_n A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_n)$
On pose $B_0 = A_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, B_n = A_n\backslash A_{n-1}$.
On a donc que les B_n sont disjoints 2 à 2 et que $\bigcup\limits_{k=1}^n B_k = A_n = \bigcup\limits_{k=1}^n A_k$ et $\bigcup\limits_n B_n = \bigcup\limits_n A_n$.
donc $\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \mu(\bigcup\limits_n B_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mu(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n\mu(B_k) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mu(\bigcup\limits_{k=1}^n B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_n)$.
(*Continuité séquentielle décroissante*)
Soit (A_n) une suite décroissante de $\mathscr{A}$, montrons que si $\exists n_0\in\mathbb{N}, \mu(A_{n_0})<+\infty$, alors $\mu(\bigcap\limits_n A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_n)$
On pose $A_\infty = \bigcap\limits_n A_n$, supposons qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0})<+\infty$
$A_{n_0} = A_\infty\cup(A_{n_0}\backslash A_\infty)$ et
$(A_{n_0}\backslash A_\infty) = A_{n_0}\cap A_\infty^c = A_{n_0}\cap(\bigcap\limits_n A_n)^c = A_{n_0}\cap(\bigcup\limits_n A_n^c) = \bigcup\limits_n(A_{n_0}\cap A_n^c)$
Or $(A_{n_0}\cap A_n^c)$ est croissante donc $\mu(\bigcup\limits_n(A_{n_0}\cap A_n^c)) = \mu(A_{n_0}\backslash A_\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_{n_0}\cap A_n^c)$
$\mu(A_\infty)<+\infty$ donc $\mu(A_{n_0}\backslash A_\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mu(A_{n_0}\backslash A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\mu((A_{n_0})-\mu(A_n))$

Or $\forall n \geq n_0, A_n \subseteq A_{n_0}$ donc $\mu(A_n) < +\infty$
donc $\mu(A_{n_0} \backslash A_\infty) = \mu(A_{n_0}) - \lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_\infty)$
donc $\mu(A_\infty) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n)$.
(*σ-sous-additivité*)
Soit (A_n) un suite de $\mathscr{A}$, montrons que $\mu(\bigcup\limits_n A_n) \leq \sum\limits_n \mu(A_n)$

On pose $B_0 = A_0, B_1 = A_1 \backslash A_0, \ldots, B_n = A_n \backslash \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k$.

les B_n sont disjoints 2 à 2 et $\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k = A_n$ donc $\bigcup\limits_n B_n = \bigcup\limits_n A_n$ et $B_n \subseteq A_n$
donc $\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \mu(\bigcup\limits_n B_n) = \sum\limits_n \mu(B_n) \leq \sum\limits_n \mu(A_n)$ □

Proposition 7. Démonstration du Lemme de Fatou.
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives alors :
$0 \leq \int \lim\limits_{n \to +\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \inf \int f_n d\mu \leq +\infty$

Démonstration. On considère la suite $\varphi_n = \inf\limits_{k \geq n} f_k$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n \in \mathscr{M}_+$ et $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n \to \lim\limits_{n \to +\infty} \inf f_n$, d'après Beppo-Levi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int \varphi_n d\mu = \int \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n d\mu = \int \lim\limits_{n \to +\infty} \inf f_n d\mu$
$\forall k \geq n, \varphi_n \leq f_k$ donc $\int \varphi_n d\mu \leq \int f_k d\mu$ et donc $\int \varphi_n d\mu \leq \inf\limits_{k \geq n} \int f_k d\mu$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int \varphi_n d\mu \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \inf\limits_{k \geq n} \int f_k d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \inf \int f_n d\mu$ □